

U.Ü. MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT4043 Fourier Analizi Final Sınavı

Toplam süre : 120dk. dir.

(Toplam 350 puanlık soru mevcuttur ve herhangi 100 puanlık kısmı çözülebilir. Sınavda sadece ders kitabı, Fourier Analysis (Schaum serisi) açıktır.)

Fourier Serileri ve Uygulamaları

1) $f(x) = \cos(x)$, $0 < x < \pi$ fonksiyonunu bir Fourier sinüs serisine açınız. Bu serinin $[0, \pi]$ kapalı aralığında her noktada $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaması için $f(0)$ ve $f(\pi)$ nasıl tanımlanmalıdır? (10 puan)

2) $x = 2\left(\frac{\sin(x)}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \dots\right)$, $-\pi < x < \pi$ eşitliğini gösteriniz (10 puan) ve integre ederek

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \dots\right), \quad -\pi < x < \pi$$

eşitliğini elde ediniz. (10 puan)

3) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < \pi$, $t > 0$ ile verilen sınır değer probleminin çözümünün

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2 t} \cos(mx) \int_0^\pi f(x) \cos(mx) dx$$

şeklinde elde edilebileceğini gösteriniz. (15 puan)

Dik Fonksiyonlar

4) $a_0, a_1 + a_2x, a_3 + a_4x + a_5x^2$ fonksiyonlarının $(0, 1)$ aralığında normalize ve birbirine dik olmalarını sağlayacak $a_i, i = 0, \dots, 5$ sabitlerini hesaplayınız. (10 puan)

5) Gram-Schmidt işlemini kullanarak $x, 1-x, 3+2x$ fonksiyonlarından $(0, 1)$ aralığında normalize dik bir fonksiyon setinin elde edilmesi mümkün müdür? Açıklayınız. (10 puan)

6) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ ile verilen Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini (λ_n) ve özfonksiyonlarını ($\phi_n(x)$) bulunuz. (10 puan) Özfonksiyonların $(0, 1)$ aralığında dik olduklarını ispatlayınız (5 puan) ve normlarını bulunuz. (5 puan)

Gamma, Beta Fonksiyonları

7) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^p} dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin(p\pi/2)}$, $0 < p < 1$ eşitliğini gösteriniz. (10 puan)

8) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6} dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ eşitliğini gösteriniz. (10 puan)

Fourier İntegralleri ve Uygulamaları

9) a) e^{-x} , $x \geq 0$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümünü bulunuz. (10 puan)

b) Bu sonuçtan yararlanarak $\int_0^{\infty} \frac{x \sin(mx)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$, $m > 0$ eşitliğini elde ediniz (10 puan)

c) Fourier integral teoreminin uygulanabilirliği açısından b)'deki eşitliğin $m = 0$ durumunda niçin geçerli olamayacağını açıklayınız. (5 puan)

10) $\int_0^{\infty} y(x) \sin(xt) dx = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$ integral denklemini çözünüz (10 puan) ve elde edilen

sonucu integralde yerine koyarak denklemin doğrulanmasını (5 puan)

11) Fourier konvolüsyon teoremini $f(x) = g(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonları için doğrulayınız. (10 puan)

12) $-\infty < x < \infty$ boyunca yerleştirilmiş sonsuz ince ve yalıtılmış bir çubuk üzerinde başlangıç ($t = 0$) sıcaklık değeri $f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$ ile verildiğine göre herhangi bir nokta ve andaki sıcaklık değerinin, κ : ısısal iletkenlik sabiti olmak üzere,

$u(x; t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]$ şeklinde olduğunu gösteriniz. (15 puan).

Bessel Fonksiyonları ve Uygulamaları

13) $J_{-5/2}(x)$ fonksiyonunu sinüs ve kosinüsler cinsinden hesaplayınız. (10 puan)

14) $J_n''(x) = \frac{1}{4} [J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)]$ bağıntısını ispatlayınız. (10 puan)

15) $\int x^2 J_0(x) dx$ belirsiz integralini hesaplayınız. (10 puan)

16) $e^{\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$ fonksiyonunun $I_n(x)$, n . mertebeden 1. çeşit modifiye Bessel fonksiyonu, için üretici fonksiyon olduğunu gösteriniz. (10 puan)

17) $4xy'' + 4y' + y = 0$ denklemini Bessel denklemine dönüştürünüz ve çözümünü veriniz. (10 puan)

18) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ Bessel denklemini $y = u / \sqrt{x}$ dönüşümü ile $\frac{d^2 u}{dx^2} + (1 - \frac{n^2 - 1/4}{x^2})u = 0$ şekline indirgeneceğini gösteriniz. (10 puan)

19) λ_p , $J_1(\lambda) = 0$ denkleminin pozitif kökleri olmak üzere $x = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_p x)}{\lambda J_2(\lambda_p)}$, $-1 < x < 1$ açılımını gösteriniz. (10 puan)

20) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$, $0 < \rho < 1$, $0 < \phi < 2\pi$, $t > 0$, $|u(\rho, \phi, t)| < \infty$, $u(1, \phi, t) = 0$,
 $u(\rho, \phi, 0) = \rho \cos(3\phi)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, 0) = 0$ ile verilen sınır değer problemini çözünüz. (20 puan)

Legendre Fonksiyonları ve Uygulamaları

21) Üretici fonksiyonu kullanarak $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$ bağıntısını ispatlayınız. (10 puan)

22) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü veriniz. (10 puan)

23) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunu $\sum_{k=0}^{\infty} A_k P_k(x)$ şeklinde bir seriye açınız ve açılımın sıfırdan farklı ilk dört katsayısını hesaplayınız. (10 puan)

24) $\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx$ integralini $m < n$ veya $m-n$ 'nin pozitif tek sayı olduğu durumlarda sıfıra eşit olacağını gösteriniz. (10 puan)

Hermite Polinomları

25) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) dx$ integralini hesaplayınız. (10 puan)

26) $H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!}$ eşitliğini gösteriniz. (10 puan)

Laguerre Polinomları

27) $nL_{n-1}(x) = nL'_{n-1}(x) - L'_n(x)$ bağıntısını gösteriniz. (10 puan)

28) $\int_0^{\infty} e^{-x} (L_n(x))^2 dx = (n!)^2$ bağıntısını gösteriniz. (10 puan)

29) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ fonksiyonunun $\sum_{k=0}^{\infty} A_k L_k(x)$ şeklinde bir seriye açınız. (10 puan)