Prof. Dr. Burak POLAT **14.11.2007**
Araş.Gör. Ömer ZOR

U.Ü. MATEMATİK BÖLÜMÜ
MAT4043 Fourier Analizi Vize Sınavı
*Toplam süre : **120dk.** dır.*
(Toplam 300 puanlık soru mevcuttur ve herhangi 100 puanlık kısmı çözülebilir.)

Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler (KTDD)

1) Aşağıdaki KTDD'in mertebelerini, lineer, kuvazilineer ve homojen olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\cos(u)=e^y$ **(5 puan)** **b)** $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u=0$ **(5 puan)**

2) Aşağıdaki KTDD'in eliptik, parabolik veya hiperbolik davranış gösterdikleri bölgeleri belirleyiniz.

a) $e^x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$ **(5 puan)**

b) $\sin^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin(2x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\cos^2(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x$ **(5 puan)**

3) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x$ denkleminin $\xi=y/x$, $\eta=y$ dönüşümleri ile $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$, $y\neq 0$ şekline gelebileceğini ve buradan da genel çözümün $u(x,y)=y\,f(y/x)+g(y/x)$ şeklinde bulunacağını gösteriniz. **(15 puan)**

Fourier Serileri ve Sınır Değer Problemleri

4) $f(x)=|\sin(x)|$, $x\in(-\infty,\infty)$ fonksiyonunun Fourier serisi gösterimini elde ediniz. **(10 puan)** Bu sonucu terim terime türeterek $\cos(x)$'in $x\in(0,\pi)$ aralığındaki Fourier serisi gösterimini elde ediniz. **(10 puan)**

5) $f(x)=e^x$, $x\in(-\pi,\pi)$ aralığında kompleks Fourier serisi gösterimini elde ediniz. **(10 puan)**

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)=\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)$ gösterimini 0 dan x e terim terime integre ederek $\dfrac{x^2}{4}$ fonksiyonunun aynı aralıktaki Fourier serisi gösterimini elde ediniz. **(10 puan)**

7) $x(\pi-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\left(\dfrac{\cos(2x)}{1^2}+\dfrac{\cos(4x)}{2^2}+\dfrac{\cos(6x)}{3^2}+...\right)$, $x\in[0,\pi]$ açılımını esas alarak (tek taraflı) Fourier kosinüs dönüşümü için Parseval özdeşliği yardımıyla $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$ toplamının hesaplanabileceğini gösteriniz. **(10 puan)**

8) $f(x+2\pi,y)=f(x,y+2\pi)=f(x,y)$ periyodiklik sağlayan ve C^1 sınıfından bir fonksiyonun çift katlı Fourier serisi gösterimi

$$\begin{aligned} f(x,y)=&\frac{a_{00}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{0n}\cos(ny)+b_{0n}\sin(ny)]\\ &+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}[a_{m0}\cos(mx)+c_{m0}\sin(mx)]\\ &+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[a_{mn}\cos(mx)\cos(ny)+b_{mn}\cos(mx)\sin(ny)\\ &\qquad+c_{mn}\sin(mx)\cos(ny)+d_{mn}\sin(mx)\sin(ny)]\end{aligned}$$

ile verildiğine göre

a) a_{00}'ı $f(x,y)$ cinsinden hesaplayınız. **(5 puan)**

b) $f(x,y)$'nin ek olarak $f(-x,y)=-f(x,y)$ ve $f(x,-y)=-f(x,y)$ simetri koşullarını sağlaması durumunda sadece d_{mn} katsayılarının sıfırdan farklı olacağını gösteriniz. **(10 puan)**

c) $x\in(-\pi,\pi)$, $y\in(-\pi,\pi)$ aralığında $f(x,y)=xy$ ile verildiğinde $d_{mn}=(-1)^{m+n}\dfrac{4}{mn}$ şeklinde hesaplandığını gösteriniz. **(10 puan)**

9) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<4$, $t>0$ $u(0,t)=u(4,t)=0$, $u(x,0)=25x$ ile verilen başlangıç-sınır değer problemini çözünüz. **(20 puan)**

Dik Polinomlar

10) $1, 1-x, 2-4x+x^2$ fonksiyonlarının $(0,\infty)$ aralığında e^{-x} ağırlaştırma fonksiyonu yardımıyla bir dik küme oluşturduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

11) $(-\pi,\pi)$ aralığında $f(x)=x$ fonksiyonunu $c_1\sin(x)+c_2\sin(2x)+c_3\sin(3x)$ şeklinde yaklaşık olarak ifade etmek istersek ortalama karesel hatayı minimize edecek $c_i, i=1,2,3$ değerlerini hesaplayınız. **(10 puan)**

12) $y''+\lambda y=0$, $y'(0)=0$, $y'(\pi)=0$ ile verilen Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini (λ_n) ve özfonksiyonlarını ($\phi_n(x)$) bulunuz. **(10 puan)** $f(x)=x$ fonksiyonunun $x\in(0,\pi)$ aralığında $\phi_n(x)$ cinsinden açılımını yazınız ve açılımın katsayılarını hesaplayınız. **(10 puan)**

Gamma, Beta Fonksiyonları

13) $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n}dx$, $m,n,a>0$ integralini hesaplayınız. **(5 puan)**

14) $\int_0^1 (\ln x)^4 dx$ integralini hesaplayınız. **(5 puan)**

15) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\pi/\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz. **(5 puan)**

16) $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{2x}}{ae^{3x}+b}dx=\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}a^{2/3}b^{1/3}}$ olduğunu gösteriniz. **(5 puan)**

Eliptik İntegraller

17) $\int_0^{\pi/2}\dfrac{d\theta}{\sqrt{1+2\sin\theta}}=F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$ olduğunu gösteriniz. **(5 puan)**

18) $\int_1^\infty\dfrac{dx}{\sqrt{x^4-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ olduğunu gösteriniz. **(5 puan)**

19) $\int_1^\infty\dfrac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}=\dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{3}{8}\Pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ olduğunu $u=\sec\theta$ dönüşümü yaparak gösteriniz. **(10 puan)**

Fourier İntegralleri

20) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulunuz. **(10 puan)** Bu sonuçtan yararlanarak $\int_0^\infty \left(\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}\right)\cos(\frac{x}{2})dx$ integralini hesaplayınız. **(10 puan)**

21) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$ ise $f(x)$ in

a) Fourier sinüs dönüşümünü **(5 puan)**
b) Fourier kosinüs dönüşümünü **(5 puan)**
bulunuz.

c) a) sonucundan yararlanarak $\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz. **(5 puan)**

d) b) sonucundan yararlanarak $\int_0^\infty \frac{\sin^4(x)}{x^2}dx=\frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz. **(5 puan)**

22) Fourier konvolüsyon teoremini ispatlayınız. **(10 puan)**

23) $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $F(\alpha)$ ise aşağıdaki fonksiyonların Fourier dönüşümlerini bulunuz. ($c=sbt$)

a) $f(x-c)$ **(2.5 puan)** **b)** $f(cx)$ **(2.5 puan)** **c)** $\frac{df}{dx}$ **(2.5 puan)** **d)** $xf(x)$ **(2.5 puan)**

Diğer

24) a) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ Gauss integralini hesaplayınız. **(10 puan).**

b) $I(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$ integralinin $\frac{dI}{d\alpha}=-\frac{\alpha}{2}I$ diferansiyel denklemini $I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ koşulu altında sağladığını gösteriniz ve buradan $I(\alpha)$'yı hesaplayınız. **(10 puan)**

25) $I(\alpha)=\int_{\alpha-1}^{\alpha^2+1}\frac{x}{x^2+\alpha^2}dx$ integrali için $\frac{dI}{d\alpha}$'yı hesaplayınız. **(5 puan).**

26) $I(\alpha)=\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$ integralinin Cauchy asal değerini hesaplayınız. **(5 puan).**

Ek: Gerekli Özel Fonksiyon Tanımları

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}dt,\ x>0 \quad , \quad B(x,y)=\int_0^{\pi/2}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\, d\theta=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)},\ x>0,\ y>0$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad x,y>0$$

$$F(k,\phi)=\int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\ 0<k<1$$

$$\Pi(k,n,\phi)=\int_0^\phi \frac{d\theta}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\ 0<k<1$$